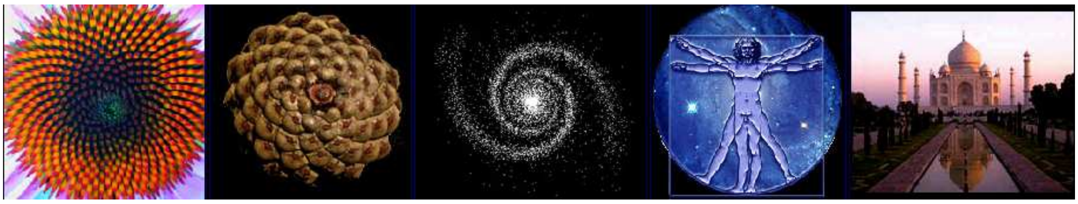
# Le nombre d'or

*Celui des proportions harmonieuses*



## *Carte d'identité*

***Son nom :***

On le désigne par la lettre grecque $\Phi$ ( phi ) en hommage au sculpteur grec Phidias (né vers 490 et mort vers 430 avant J.C) qui décora le Parthénon à Athènes. C'est Théodore Cook qui introduisit cette notation en 1914.

***Sa valeur approximative** :* 1,618… ( nous reviendrons sur ce nombre)

## *Dans les constructions de l'homme*

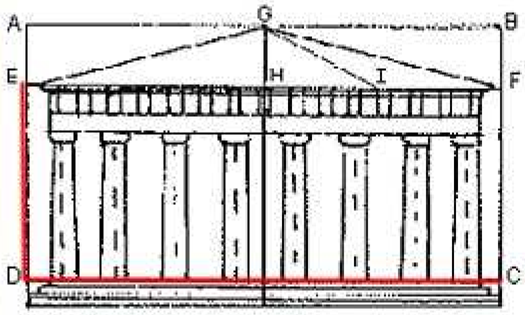
### La Pyramide de Khéops

D'après Hérodote, des prêtres égyptiens disaient que les dimensions de la grande pyramide avaient été choisies telles que : *"Le carré construit sur la hauteur verticale égalait exactement la surface de chacune des faces triangulaires".*

Les géomètres d'aujourd'hui disent que le rapport de la hauteur de la pyramide sur sa demi –base est voisin du nombre d'or.

### Le Parthénon

On le trouve aussi dans les proportions du Parthénon

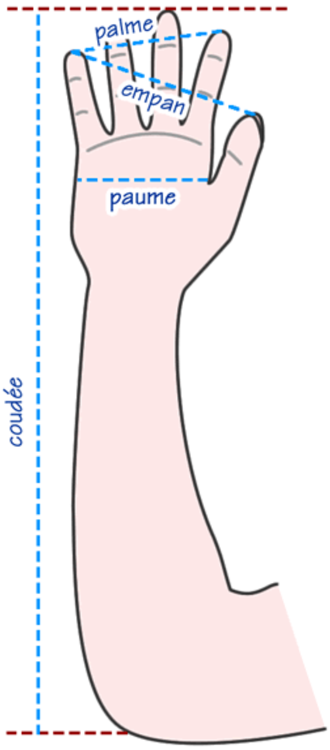



Le Parthénon s'inscrit dans un rectangle d'or, c'est-à-dire tel que le rapport de la longueur à la hauteur est égal au nombre d'or.
Sur la figure : DC/DE = $\varphi$.

Sur la toiture du temple, GF/GI = $\varphi$

## *Chez l'homme*

**Léonard de Vinci,** c'est bien connu, a noté que divers rapports du corps humain respectaient le nombre d'or et il l'utilisait dans ses tableaux. Plus tard, Picasso et Dali firent de même.




**Au moyen âge, les bâtisseurs de cathédrales utilisent 5 unités de mesure relatives au corps humain :**

- la paume = 34 lignes = 7,64 cm
- la palme = 55 lignes = 12,36 cm
- l'empan = 89 lignes = 20 cm
- le pied = 144 lignes = 32,36 cm
- la coudée = 233 lignes = 52,36 cm

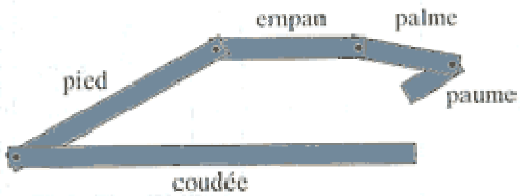
Avec une unité de base : la ligne = 2,247 mm

Il en résulte 2 **constatations surprenantes** :

***on passe d'une mesure à l'autre en la multipliant par le nombre d'or***

***Une unité de mesure est égale à la somme des deux précédentes***

Les mathématiciens, eux, n'en seraient pas étonnés, ce sont, comme nous le verrons plus loin des caractéristiques propres à la *suite de Fibonacci.* Et ces nombres 34, 55, 89, 144, 233 en font tous partie




En guise de « mètre » pliant les bâtisseurs de cathédrales utilisaient ce qu'ils appelaient une « pige » pliante constituée de cinq tiges articulées, correspondant chacune à ces mesures

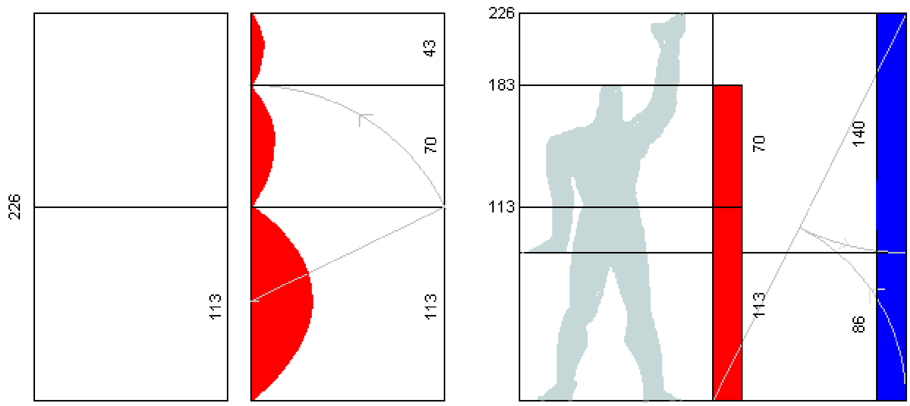
« standardisées » du corps humain : paume, palme, empan, pied, coudée.

## Le Modulor de Le Corbusier

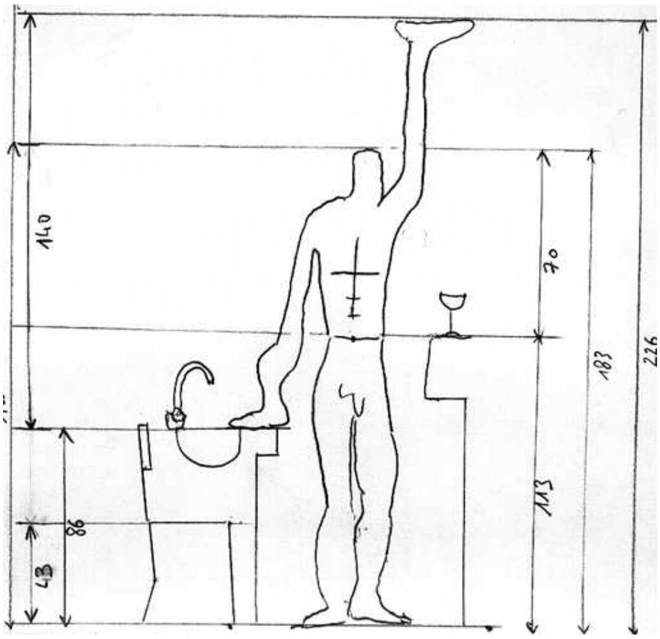
"***la nature est mathématique, les chefs-d'œuvre de l'art sont en consonance avec la nature ; ils expriment les lois de la nature et ils s'en servent***" (Le Corbusier)

Le Corbusier termine en 1948 la rédaction d'un essai, intitulé LE MODULOR, fruit d'une réflexion menée dès les années 20, notamment dans la revue "'l'Esprit Nouveau", marquée plastiquement par le **cubisme** et la Section d'Or.
L'échelle du Modulor revient aux mesures basées sur celles du corps humain, que le système métrique dans son abstraction a fait oublier, alors que le système anglo-saxon pied-pouce, en garde encore la trace. Le Corbusier est préoccupé de réconcilier ces deus systèmes de mesure : le système métrique, pratique, logique mais abstrait, et le système anglo-saxon moins pratique, mais qui a conservé ses divisions en relation avec le corps humain et le nombre d'or. Pour Le Corbusier, c'est une évidence, démontrée principalement à la **Renaissance**, **le corps humain obéit à la règle d'or. Et Le Corbusier va aussi s'appuyer sur la suite de Fibonacci qui en rend compte**

Défini comme la "*mesure harmonique à l'échelle humaine applicable universellement à l'architecture et à la mécanique*", le Modulor prend la forme matérielle d'un ruban de métal ou de plastique de 2,26m (89 pouces) joint à un tableau numérique donnant deux séries utiles. La hauteur totale du corps finalement retenue est celle de 1,83m. cette dimension permet d'obtenir par l'application de la "règle d'Or" des valeurs proches d'entiers que ce soit en mètre ou en pouce. Le bras levé de cet homme de 1,83 atteint 2,26m (55"), le plexus est à mi-hauteur soit 1,13m (27"1/2). Le Corbusier nomme ***série rouge*** la suite de Fibonacci établie sur l'unité de 1,13m et ***série bleue*** celle établie sur son double 2,26m.




D'après Le Corbusier : Quelques mesures fournies par la section d'or liée à la stature humaine



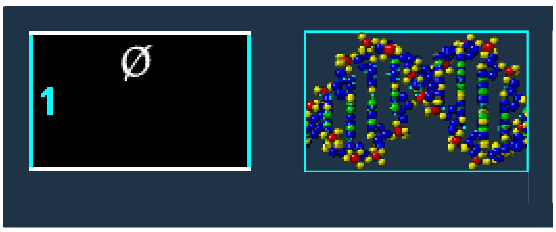

Rapports fonctionnels avec les éléments d'habitat (chaise, lavabo, bar…), selon Le Corbusier.

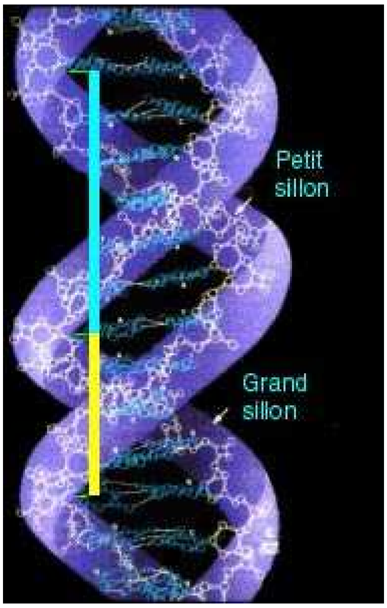
Les nombres retenus par le Corbusier sont des valeurs approchées. L'exactitude mathématique le préoccupe moins que de proposer une échelle d'harmonie visuelle qui puisse guider l'action de l'architecte. Bien sûr "les mathématiques sont l'édifice magistral imaginé par l'homme pour sa compréhension de l'univers"(Le Modulor, p.73) à l'instar des dieux "derrière le mur qui jouent au nombre"(p. 220), elles sont susceptibles d'ouvrir une de ces portes qui permettent d'atteindre "les dieux, là où sont les grands systèmes".

## Le nombre d'or et l'ADN

### *Dimensions de la molécule ADN*

Le rapport entre la longueur (34 angstroms) et la largeur (21 angstroms) d'un cycle complet de la double hélice ADN est égal au nombre d'or Phi





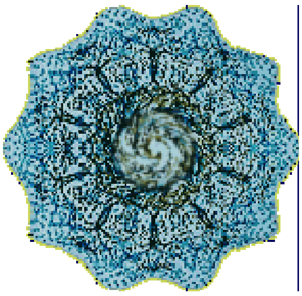

***La double hélice de l'ADN–B est aussi dans le rapport Phi***

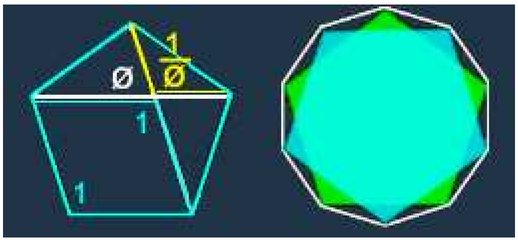
L'ADN dans la cellule se présente comme une double hélice entrelacée, designée AND-B

Cette forme d'ADN a deux sillons dans ses spirales dans un rapport phi entre grand et petit sillons respectivement environ 21 et 13 angstroms

***La section de l'ADN  est basée sur Phi***

Section en forme de décagone régulier. Qu'est-ce qu'un décagone régulier sinon, deux pentagones entrelacés dans lesquels on retrouve le rapport Phi, comme nous le verrons plus avant.






## La musique aussi…

- La cinquième symphonie de Beethoven
- Les sonates de Mozart
- ...

« Nous sommes mystérieusement accordés à ce nombre, car la section d'or agit sur nos sens et, par eux, sur notre cortex cérébral, essentiellement le droit, mais sans doute pas exclusivement, c'est pour cette raison que nous sommes inconsciemment enclins à trouver belles les grandeurs de tous ordres qui entrent dans cette relation. »
*La Recherche* (1995)

## *Dans la nature*

**Le coquillage nautile** a une forme de spirale logarithmique.On peut la dessiner à partir d'une série de rectangles d'or, comme nous le verrons.

La croissance des arbres, des plantes, des **fleurs** met en œuvre le nombre d'or dans la disposition en spirale des feuilles le long de la tige, dans le nombre des pétales,

Par exemple, les lis ont 3 pétales, les boutons d'or en ont 5, les marguerites ont souvent 34 ou 55 pétales, etc. Et, lorsqu'on observe le coeur des **tournesols** on remarque deux séries de courbes, une enroulée dans un sens et une dans l'autre; le nombre de spirales n'étant pas le même dans chaque sens. Pourquoi le nombre de spirales est-il en général soit 21 et 34, soit 34 et 55 ? Encore des nombres de la suite de Fibonacci.

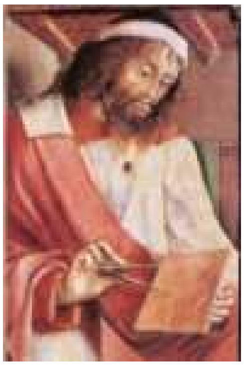
34 spirales tournent dans le sens des aiguilles d'une montre et 21 spirales tournent dans l'autre sens.

Dans un ananas ou une pomme de pin les écailles s'organisent aussi en deux ensembles de spirales inverses dont les nombres appartiennent à la suite de Fibonacci.

Surprenant aussi, de constater que dans une ruche, le rapport entre le nombre des ouvrières et celui des faux bourdons est égal à $\varphi$.

# *La modélisation géométrique*

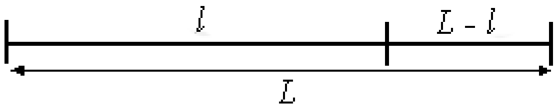
## Le segment d'or



*Le partage en "extrême et moyenne raison" d'un segment.*

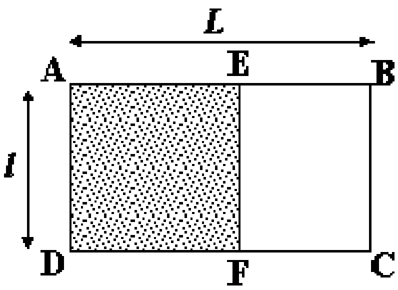
D'après **Euclide**,
dans le livre VI des *Eléments*

Un segment est partagé suivant la section d'or ou la proportion divine si le grand (*L*) et le moyen (*l*) segment sont dans le même rapport que le moyen et le petit *(L-l)* segment.




$$\frac{L}{l} = \frac{l}{L - l} = \varphi$$

## Le rectangle d'or



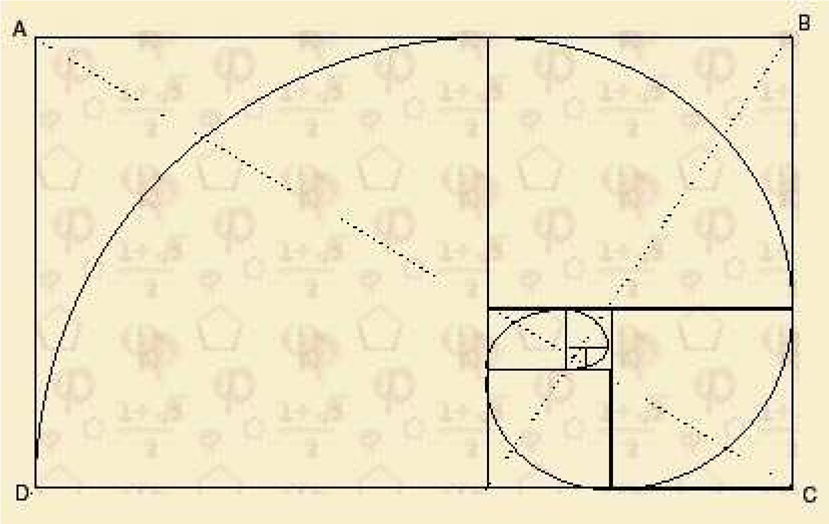

$$\frac{L}{l} = \varphi$$

***Le rapport Longeur / largeur est égal au nombre d'or*** $\varphi$

***Particularité d'un rectangle d'or tel que ABCD :***

***après inscription d'un carré tel que AEFD, le sous-rectangle résiduel EBCF est aussi un rectangle d'or.***

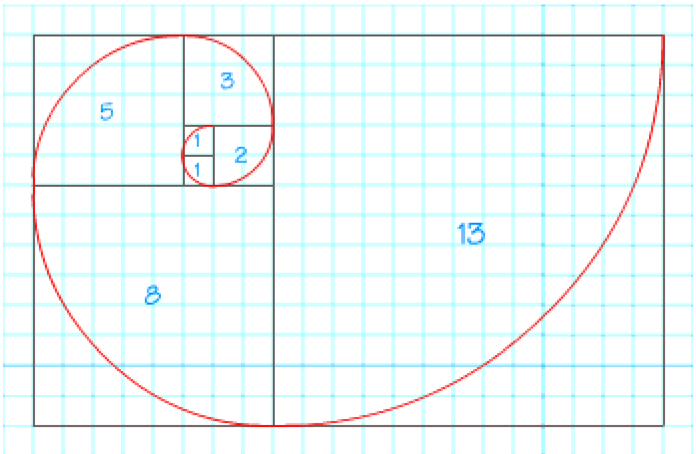
## La spirale d'or




La figure est construite à partir d'un grand rectangle d'or ABCD.
On retire le grand carré au grand rectangle d'or et on obtient un petit rectangle d'or.
Ensuite, on retire le petit carré au petit rectangle d'or et on obtient un rectangle d'or plus petit.
On réitère l'opération indéfiniment. Elle ne s'arrête pas car la longueur et la largeur d'un rectangle d'or sont incommensurables (on ne peut pas mesurer l'un en prenant l'autre pour unité).

Nota 1 : Les diagonales des rectangles se coupent au même point qui est le *point limite* de la spirale.

Nota 2 : Les côtés des carrés correspondent à une suite : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13… comme le montre la figure ci-dessous




Cette suite de nombre est connue des mathématiciens sous le nom de ***suite de Fibonacci*** , et si l'on continuait on obtiendrait 13, 21, 34, 55, 89… Particularités de ces nombres :

• un nombre de la suite est la somme des deux précédents

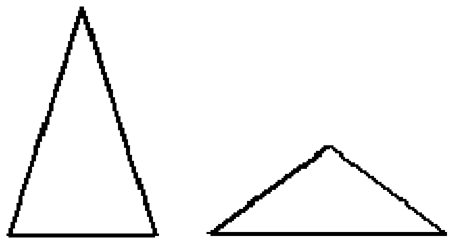
• et cerise sur le gâteau, cette suite est liée au nombre d'or. Comment donc ? Car ce nombre d'or n'est pas un nombre de tout repos, c'est ce qu'on appelle un *nombre irrationnel*, c'est à dire qu'il ne peut être obtenu par la division de deux nombres entiers. Et la suite de Fibonacci, ce sont des nombres bien entiers

Malgré ce handicap de nature, deux nombres successifs de la suite sont dans le rapport du nombre d'or autant qu'il est possible de l'être pour deux entiers et l'approximation est d'autant plus petite que les nombres sont grands…

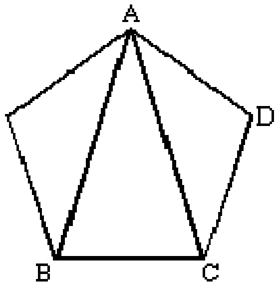
Ainsi : 8/5 = 1,6
21/13 = 1,615
34/21 = 1,619
55/34 = 1,617

## La triangle d'or

Un **triangle d'or** est un triangle **isocèle** dont les longueurs des côtés sont dans le rapport du nombre d'or.



Deux triangles d'or possibles : leurs angles mesurent **36** ° et **72°.**




Dans le pentagone régulier ci-contre, le triangle ABC et le triangle ACD sont tous deux des triangles isocèles dont les longueurs des côtés sont dans le rapport du nombre d'or : ce sont deux **triangles d'or**.

Le pentagone régulier est une figure d'or car la proportion entre une diagonale et un côté est le nombre d'or.

$$AC/AD = \varphi$$

## La modélisation algébrique

Le nombre d'or est la solution positive de l'équation du second degré :

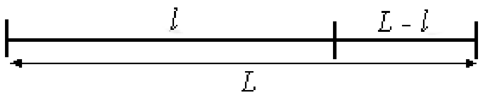
$$x^2 - x - 1 = 0$$

qui est vérifiée pour :

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

Mais d'où vient cette équation ?

Reprenons le segment d'Euclide :




$$\frac{L}{l} = \frac{l}{L - l} = \varphi$$

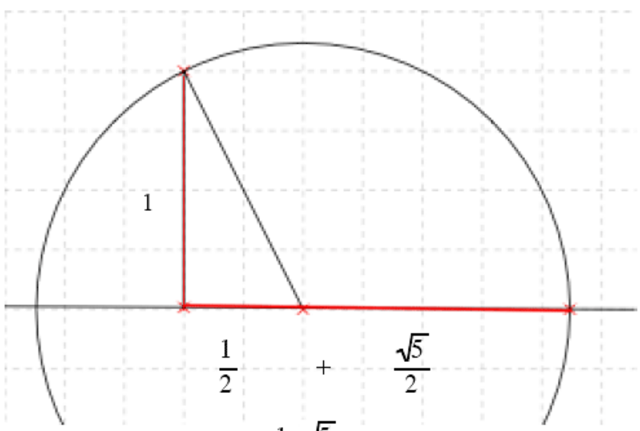
Qui se développe en :

$$\left(\frac{L}{l}\right)^2 - \frac{L}{l} - 1 = 0$$

Autrement dit une équation de la forme :

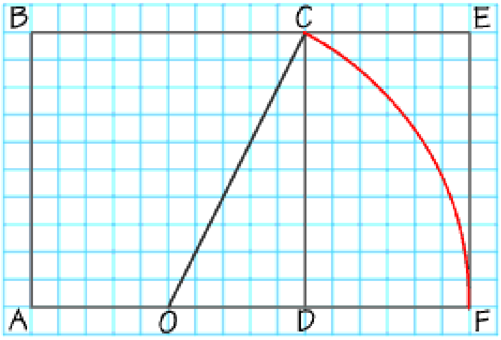
$$x^2 - x - 1 = 0$$

## La construction du nombre d'or




$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

Une autre façon de construire le nombre d'or est illustrée par la figure suivante :




Soit un carré ABCD

• O milieu de AD

• Un arc de cercle de centre O et de rayon OC coupe le prolongement de AD en F

• Les segments AF et AD sont dans le rapport du nombre d'or

## *Suites de Fibonacci*

La suite que nous avons rencontrée, plus haut, est, en fait, la plus simple qui puisse exister, les deux nombres de départ sont 1 et 1.

Une autre, assez extraordinaire, très souvent trouvée dans la nature est établie avec pour nombres de départ: 1 et 1,618... (c'est à dire 1 et phi)

D'où la suite, 1 1,618... 2,618 ... 4,236... 6,854... etc.

Amusez vous avec une calculette à diviser deux nombres consécutifs de cette suite. Eh oui, ... vous trouvez toujours 1,618...

Cette suite peut s'écrire :

1 phi $\text{phi}^2$ $\text{phi}^3$ etc

Ces nombres qui semblent compliqués, en fait, comme avec ces coffrets éducatifs destinés à des enfants du secondaire, il est possible de les mettre en œuvre avec des bouts de bois que l'on ajoute ou retranche, un bout de ficelle... C'est sans doute avec des méthodes analogues que nos ancêtres qui bien que ne sachant pas calculer une racine de 5, savaient manipuler le nombre dans leurs créations architecturales et artistiques. Ils recopiaient les modèles de la nature...

## *Pourquoi la nature aime-t-elle tant ces nombres ?*

(***nombre d'or et suite de Fibonacci***).

Pour les pétales des fleurs, et les plantes, c'est seulement depuis les années 90 que les travaux de Couder et Douady, notamment, ont permis de modéliser le mécanisme de leur croissance : la nature cherche à tirer parti au mieux de l'espace dont elle dispose, et de l'accès à la lumière. Peut-être aussi des mécanismes chimiques d'attraction / répulsion jouent-ils un rôle pour engendrer ces merveilleuses spirales de la disposition des graines de tournesol, chacune se mettant là où elle pourra se développer en bon voisinage avec ses « sœurs » et concurrentes dans la compétition pour la lumière... avec pour résultat ces motifs esthétiques et mathématiques…

Mais la présence du nombre d'or logé jusqu'au cœur de l'ADN, la molécule de la vie humaine et de toute forme de vie - au delà du constat - garde tout son mystère.

**Crédit :**

http://trucsmaths.free.fr/nombre_d_or.htm cet article emprunte largement à la rubrique nombre d'or de cet excellent site.

http://www.chateau-de-mezerville.org/curiosites-geometriques/nombre-d-or-geometrie.php éclairage complémentaire sur le nombre d'or

http://www.ac-poitiers.fr/arts_p/b@lise14/pageshtm/page_7.htm Le *Modulor* de Le Corbusier

http://goldennumber.net/dna.htm Le nombre d'or et l'ADN, site en anglais dédié au nombre d'or. Bonne synthèse.

http://www.lenombredor.free.fr/nature.htm le nombre d'or et la nature

http://www.chalagam.com/?cont=livres&sb=gnoc Chalagam editions, coffrets pédagogiques sur le nombre d'or

**Pour en savoir plus :**

*L'aventure des nombres*. Gilles Godefroy. Odile Jacob, 1998

*L'univers des nombres.* Ian Stewart. Pour la Science, 1999

*La physique des spirales végétales*, Douady et Couder in La Recherche, janvier 1993
Ces travaux sont en partie repris sur : http://www.techno-science.net/?onglet=glossaire&definition=4694 pour ceux qui désirent « creuser » le sujet.